Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 12: Historia y Epistemología

CIAEM
ACME
Fundado Founded: 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 12: Historia y Epistemología
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-09-5
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 12: Historia y Epistemología*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Reconstrucción del significado holístico de la antiderivada

Wilson **Gordillo** Thiriat
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
wgordillot@udistrital.edu.co
Luis R. **Pino-Fan**
Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. Para ello se realiza un estudio histórico-epistemológico, de tipo documental, a través del cuál se identifican diversas prácticas que abordaron los matemáticos de la época y que dieron paso al surgimiento y evolución de la noción antiderivada. Como resultado, se identificó, a partir del análisis de dichas prácticas con las herramientas teórico-metodológicas que nos proporciona el marco teórico denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS), que a lo largo de la historia la antiderivada ha adoptado cuatro significados parciales que en conjunto, conforman el significado holístico de dicha noción.

Palabras clave: antiderivada, estudio histórico-epistemológico, enfoque ontosemiótico, significado holístico, configuración epistémica.

Introducción

El estudio histórico-epistemológico de los objetos matemáticos, según Anacona (2003), aporta elementos que refieren a sus distintas concepciones, en estos estudios se analizan las posibles dificultades que se presentaron en la construcción de éstos. Coincidiendo con Doorman y Van Maannen (2008), en el hecho de que este tipo de estudios es importante puesto que permite dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. De acuerdo con D'Ambrosio (2013), la comprensión de los objetos matemáticos depende de cómo se originan y de sus causas o razones que propiciaron su desarrollo. La antiderivada como objeto matemático, ejerce un rol de mediador entre el cálculo diferencial y cálculo integral. Cada uno de estos dominios con las nociones que los conforman, entre ellas la derivada y la integral. Estas dos nociones han sido objeto de estudios históricos epistemológicos de forma independiente; para la derivada, Mateus (2011), Cantoral (2000), y Pino-Fan, Godino, y Font (2011); para la integral, Cordero (2002), Cabañas-Sánchez (2011), y Crisóstomo (2012).

En este trabajo presentamos el resultado de un estudio histórico-epistemológico de tipo documental, que se realizó con el fin de identificar las diversas etapas históricas de las cuales emerge la antiderivada. Describimos las características de las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos, los cuales contribuyeron al surgimiento y formalización de la antiderivada como objeto matemático. Para el análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas, utilizamos algunas de las herramientas que nos proporciona el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática, concretamente utilizamos la noción de configuración epistémica, la cual nos permitió identificar y caracterizar cuatro significados parciales para la antiderivada. Dicha noción teórica se detalla en el siguiente apartado.

Marco teórico y metodología

Con la finalidad de realizar una reconstrucción del significado holístico para la antiderivada, realizamos un estudio de la historia del análisis matemático, en el cual tratamos de identificar problemáticas relevantes que dieron paso al surgimiento de la antiderivada y a su evolución.

Una vez identificadas estas situaciones problemas en las etapas históricas, el siguiente paso fue identificar el tipo de problemas que se abordaron en cada una de ellas, así como el tipo de tratamiento (o soluciones) que se plantearon. Para analizar tanto el tipo de situaciones-problemas como el tipo de soluciones que se plantearon a dichas situaciones-problema, hicimos uso de la noción de configuración epistémica (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Esta noción es proporcionada por el marco teórico conocido como enfoque ontosemiótico, y nos parece relevante su uso para los fines de nuestra investigación, dado que permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre antiderivadas, así como los significados de esta noción matemática, de acuerdo a cada etapa histórica.

Estudio histórico-epistemológico de la antiderivada

El estudio histórico-epistemológico, de tipo documental, tuvo por objetivo la identificación de las principales problemáticas que fueron abordadas en distintas etapas históricas y que dan origen a la emergencia del objeto matemático antiderivada. Como referente inicial, consideramos aquellas problemáticas en las que se contempla, explícita o implícitamente, la relación entre la derivada y la integral.

En este sentido, se ha dividido este estudio en tres grandes bloques: 1) la génesis de la antiderivada; 2) la antiderivada en la época medieval y el inicio de la edad moderna; y 3) en busca del rigor y la fundamentación matemática de la antiderivada.

La génesis de la antiderivada

Los matemáticos griegos se destacaron en sus procedimientos geométricos intuitivos, en especial, se dedicaron a encontrar tangentes y cuadraturas de diferentes superficies. Sus trabajos son la base de la génesis de la antiderivada, por esto es importante señalar a uno de ellos en particular, quien trabajó con las dos nociones matemáticas que vinculan a dicho objeto. Fue Arquímedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.), quien en sus trabajos utiliza la noción de recta tangente y sus propiedades, para el trazado de polígonos circunscritos a circunferencias; noción propuesta años antes por Euclides de Alejandría (325 a.C-265 a.C.).

Con respecto a la cuadratura, fue Arquímedes quien a través de la descomposición de polígonos en triángulos, como se muestra en su obra *Cuadratura de la Parábola*, demuestra geométricamente que un segmento de parábola puede agotarse[1] mediante una serie de triángulos

[1] Procedimiento geométrico de aproximación en el cual se inscriben triángulos en una curva. Este procedimiento también es conocido como método de exhausción.

decrecientes de área no constante. Este procedimiento lo llevó a demostrar el área del segmento parabólico.

En esta etapa histórica aparecen las tangentes –'proto derivadas' (Pino-Fan, 2014)– y las cuadraturas (integrales), como dos objetos matemáticos emergentes de prácticas geométricas. No hay evidencia que indique, durante este período, el estudio de la relación entre dichos objetos. Hubo que esperar hasta el medioevo para ver nuevos aportes en cuanto a esta relación.

La antiderivada en la Edad Media y el inicio de la Edad Moderna

Los antecedentes planteados por los griegos, y en especial por Arquímedes, influyeron en los matemáticos de la época medieval y del inicio de la edad moderna, entre ellos Isaac Barrow (1630-1677), quien en su obra *Lecciones de Óptica y Geometría*, destaca la relación geométrica entre las tangentes y las cuadraturas (Figura 1).

Este resultado geométrico es asumido en la actualidad como la versión preliminar del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). En esta etapa histórica, el objeto matemático antiderivada emerge con procedimientos geométricos que relacionan la tangente de una curva con su cuadratura. El argumento de dicha relación (las tangentes con sus cuadraturas) se basa en construcciones geométricas planteadas por los griegos, las cuales se detallan en el apartado 4.1. Barrow, durante este período, avanza al establecer la relación geométrica entre la tangente de una curva y su cuadratura, relación que hasta el momento, ningún estudio ha mostrado que existiese con anterioridad. Este gran avance de Barrow, hizo detonar en los matemáticos de la época, y en algunos de sus discípulos, una serie de aportes no geométricos en relación con la derivada, la integral, y la relación entre ambas nociones. Estos aportes se describen en los apartados 4.2 y 4.3.

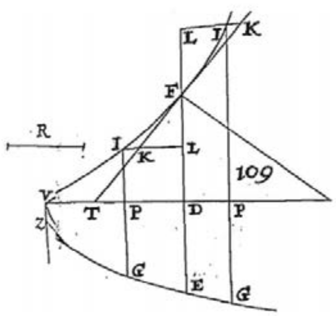

Figura 1. Relación entre tangentes y cuadraturas (Barrow, 1735, p. 167).

En el siglo XVII, Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), tomaron las bases teóricas matemáticas heredadas de Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, y Roberval, quienes aportaron a la germinación de una pre-antiderivada. En especial, Newton y Leibniz toman los aportes de Barrow, como se mostró anteriormente, y cada uno de forma independiente, y de acuerdo con Pino-Fan (2014), 'fundaron' lo que hoy denominamos *cálculo infinitesimal*. Según Collete (1985), los predecesores de Newton y Leibniz habían utilizado métodos de análisis para resolver problemas con curvas especificas, algunas de los cuales ya habían sido abordados por los matemáticos griegos.

Newton: el aporte cinemático

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva:

> Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones (Newton, 1736, p. 20).

Newton introduce inicialmente la noción de fluxiones de forma geométrica, en curvas cinemáticas que describen comportamientos en función del tiempo. Él describe el movimiento de un punto como la trayectoria de un móvil, en donde la velocidad en cada punto tiene componentes, según las direcciones de los ejes $\dot{x}, \dot{y}$. Para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva dada en un punto, calcula el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de direcciones de los ejes. Este cociente de diferenciación, para la época era sencillo de calcular, tanto que en los escritos de Newton, se escriben tablas que le posibilitan resultados directos para este cociente; la finalidad de estas tablas era la minimización de esfuerzos matemáticos en la búsqueda de identificar las propiedades de las curvas conocidas en su tiempo. Al mismo tiempo, Newton plantea el problema inverso, que descrito en términos actuales es: dado el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, cómo encontrar y en función de x.

Newton abordó el desarrollo del cálculo a partir de la geometría analítica, desarrollando un enfoque geométrico y analítico para lo que hoy conocemos como *derivadas,* las cuales aplica sobre curvas definidas a través de ecuaciones. Newton también buscaba cómo cuadrar distintas curvas, y la relación entre la cuadratura y la teoría de tangentes, convirtiéndose este en un problema fundamental para Newton (1736): dada una relación entre fluentes, encontrar la correspondiente relación entre sus fluxiones; y de forma recíproca, dada una relación entre fluxiones, hallar la correspondiente relación entre fluentes.

Newton introduce un nuevo lenguaje al referirse a las fluxiones y fluentes, en la concepción de dos problemas; el primero consistió en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema es planteado como el reciproco del primero. Esta relación, cinemática, entre las fluxiones y las fluentes, evidencian el surgimiento de lo que podría denominarse "proto-antiderivada", la cuál para Newton es originalmente una "integral indefinida".

Newton se percató de que el método de fluxiones podía utilizarse para obtener las velocidades instantáneas de una trayectoria conocida. En sus primeras investigaciones trabaja únicamente con problemas geométricos, como encontrar tangentes, curvaturas y áreas, utilizando como base matemática la geometría analítica de Descartes. No obstante, con el afán de separar su teoría de la de Descartes, probablemente por la limitación cartesiana, comenzó a trabajar únicamente con las ecuaciones y sus variables, sin necesidad de recurrir al sistema cartesiano. Por ejemplo, la aproximación del cálculo del área, es descrita como: el cociente $\frac{z(x+o)-z(x)}{o}$, se hace igual a la ordenada cuando o "se hace nada".

Newton también incluyó en su obra sobre fluxiones tablas de curvas clasificadas, que comprendían regiones limitadas por la abscisa y la ordenada para cada una de las formas curvas. Estas tablas corresponden en la actualidad a reglas de integración para el cálculo de áreas.

Leibniz: el aporte de análisis matemático

En el mismo período, de acuerdo con Collete (1985), Leibniz elabora un enfoque basado en el concepto de sumas y diferencias finitas (caso discreto), y cuando se aplica a curvas (caso continuo), pueden llegar a ser infinitamente pequeñas. Su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su "*cálculo de las diferencias*" (Pino-Fan, 2014, p. 96). Sus ideas permiten interpretar el paso de lo intuitivo a lo formal, con una construcción simbólica, lo que representa un gran avance al desarrollo del calculo infinitesimal. Leibniz, al igual que Newton, utilizó un nuevo lenguaje notacional, tal como se evidencia en su trabajo con el símbolo $\int l$ (suma de todas las *l*), para generar la sustitución de la notación usada por Cavalieri para la misma suma, "$Omn \cdot l$" (suma de todas las *l*).

Los *argumentos* propuestos por Leibniz, descritos por Boyer (1959), muestran el manejo de *propiedades* para determinar el área bajo una curva, la vinculación de limites de sumas en funciones continuas con la *integral definida*, llevó a Leibniz a descubrir lo que hoy se conoce como el teorema fundamental del cálculo, parte 2; como se muestra a continuación:

"Si, $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, *para una función continua f(x), tiene una derivada que es la misma, F´(x)=f(x). En general, es posible encontrar valores para* $x = a$, $x = b$, *de un intervalo [a,b] donde la función F(x) puede ser derivada de f(x). La función F(x), llamada primitiva de f(x), y los valores* $F(b) - F(a)$, *son ocasionados por la definición de* $\int_a^b f(x)dx$, *en el caso que la relación* $\int_a^x f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ *es el teorema fundamental del cálculo, que define la integral definida*" (Boyer, 1959, p. 11).

Esta descripción contemporánea de Leibniz descrita por Boyer (1959), relaciona el objeto derivada y la integral definida, a través de una función llamada primitiva o antiderivada.

En términos comparativos, de los trabajos y desarrollos de los fundadores del cálculo, se podría decir que el trabajo de Newton se basa en variaciones respecto al tiempo, pues el origen de sus ideas, tal como lo hemos comentado, es físico. Leibniz, por el contrario, parte estudiando la geometría de los infinitesimales, de ahí que su trabajo se basara en sumas de infinitesimales, sumas que son asumidas como integrales definidas para las cuáles, requiere el uso de funciones primitivas (antiderivadas) para el cálculo respectivo de áreas.

En busca del rigor y la fundamentación matemática de la antiderivada

En 1742, Jean Bernoulli (1667-1748) publicó en la *Opera Omnia* el primer texto expositivo de cálculo integral, considerado satisfactorio por la *Royal Society of London*. En dicha obra, considera la integral como la operación inversa de la diferencial con la adición adecuada de una constante, concepción distinta a la de Leibniz quien consideraba la integral como una suma de cantidades infinitamente pequeñas. Fue Leonhard Euler (1707-1783), en su obra *Fundamentos de cálculo integral*, quien llevó a la noción matemática antiderivada a su desarrollo actual.

Euler es quien plantea una solución para algunos problemas cinemáticos y geométricos, sin necesidad de encontrar una función primitiva (antiderivada). En cambio propuso que es posible determinar una función desconocida a partir de una relación que la vincule con su derivada. Del mismo modo, Euler consideró la incapacidad de los métodos elementales propuestos por Leibniz y Newton para resolver problemas importantes, puesto que dichos métodos se restringían a algunas funciones a las que denominó elementales[2]. Para dar solución a la suma infinita dichas funciones, introduce en su tratado un método numérico que permite solucionar cualquier situación.

Configuraciones epistémicas asociadas a problemáticas que involucran el uso de la antiderivada

El recorrido histórico-documental que realizamos, permitió identificar diversas problemáticas que dieron paso a la emergencia de la antiderivada como objeto matemático. Dichas problemáticas las hemos agrupado en cuatro grandes categorías:

a) El problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma.

b) El problema de la relación fluxiones–fluentes.

c) El problema sobre la relación de las sumatorias y los diferenciales.

d) El problema de la identificación de funciones elementales.

Cada una de estas categorías, refieren a sistemas de prácticas con características concretas y desarrollados en diversas etapas históricas. A continuación se analiza cada uno de los cuatro sistemas de prácticas, mediante el análisis de un ejemplo prototípico a través del cual se describen las características de la configuración epistémica asociada a cada sistema.

Configuración epistémica 1: El problema geométrico de las tangentes y cuadraturas

Este problema, descrito en la sección 3.2 (Figura 1), fue abordado por Barrow de forma geométrica, y es característico tanto de las situaciones/problemas abordados en la época, como de las prácticas matemáticas que hasta esa época se desarrollaban. Barrow logra unir dos *conceptos* separados hasta ese momento, la ‘tangente a una curva’ y la ‘cuadratura’ de la misma.

Las construcciones geométricas son un trabajo propio de los griegos y se utilizaron como único *argumento,* y *lenguaje,* hasta el siglo XVII. Todas las *propiedades* y *procedimientos* están apoyadas en construcciones geométricas heredadas de los griegos, los cuales no disponían de métodos generales para el trazado de rectas tangentes a cualquier curva, ni mucho menos relacionarla con la cuadratura de la misma. Tanto en el planteamiento como en las soluciones de las situaciones problemas, se utilizó un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentos* eran puramente sintéticos. En las soluciones propuestas, intervenían *conceptos* tales como curva continua creciente, perpendicularidad, puntos, rectángulo, longitud, paralelismo. Así mismo, en la lección X planteada por Barrow, aparecen *propiedades* utilizadas siglos atrás por los griegos, como la perpendicularidad entre curvas, rectas que unen intersecciones opuestas al trazo de tangentes en figuras cónicas, entre otras. Con respecto a los *procedimientos,* son los característicos de los matemáticos de la época: geométricos.

El problema resuelto por Barrow, que fue iniciado por los griegos y trabajado por otros matemáticos de la época, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado “*Tangentes-Cuadraturas*”, el cual reúne los usos matemáticos geométricos que en dicha etapa

[2] Una función denominada elemental es una función construida a partir de una cantidad finita de funciones fundamentales y constantes mediante operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) y/o la composición de funciones (Nikolski, 1985, pg.16).

histórica se desarrollaban y que conferían un significado parcial, de tipo geométrico, a la antiderivada.

Configuración epistémica 2: El problema de la relación fluxiones-fluentes

Este problema, descrito en el apartado 3.3.1, es parte de un sistema de prácticas, que se ha denominado *Fluxiones-Fluentes*. Para describir los elementos de esta segunda configuración (CE2), consideramos dos problemas prototípicos propuestos por Newton (1736):

> I. Dada la longitud del espacio descrito continuamente (es decir, en todo momento), encontrar la velocidad del movimiento en cualquier momento propuesto.
>
> II. Dada la velocidad del movimiento continuamente, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier momento propuesto (p. 19).

Estos problemas, y su solución, están basados en la concepción cinemática del movimiento continuo y maneja dos *conceptos* centrales. El primero es el de *fluente,* entendido como cantidad de movimiento que varía respecto del tiempo. El segundo es el de *fluxión*, que es la velocidad de cambio del movimiento respecto del tiempo.

El primer problema se aborda desde el ejemplo propuesto por Newton (1736): *"Dada la curva de ecuación* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$*, calcular las fluxiones"* (p. 21).

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Newton introduce nuevos *conceptos/definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones de términos y notación (además de *lenguaje* algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar los siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) *"o"* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño; b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x*, que representa con ox (análogamente define el momento de *y, oy*); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto $v, x, y, z,$ para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones"; y e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *"o"*, es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* de esta configuración. Para abordar el segundo problema Newton sugiere: "Sea la ecuación propuesta por $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, calcular las fluentes" (Newton, 1736, p. 26).

Sus escritos muestran la solución a este problema, indicando que se debe proceder de manera contraria a la sustitución del primer problema planteado.

En este último ejemplo propuesto por Newton, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como *argumenta* los procedimientos (y en general sus *definiciones* y *proposiciones*) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones/propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$ (derivación); y b) dada una $y = max^{m-1}$ entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (integración).

En cuanto a los tipos de *situaciones/problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa.

Vemos como en esta configuración las fluxiones o velocidades de los movimientos de las fluentes –que en la actualidad conocemos como la derivada–, y las fluentes o cantidades que varían respecto al tiempo –que en la actualidad conocemos como antiderivación–, son entendidos por Newton como procedimientos recíprocos.

Configuración epistémica 3: El problema de la relación diferenciales-sumatorias

Este problema, descrito en el apartado 3.3.2, planteado por Leibniz, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "Sumatoria-Diferencial". Este sistema de prácticas lo analizamos a partir de dos problemas prototípicos. El primero está basado en la construcción del cálculo diferencial a partir de las diferencias infinitesimales, mientras que el segundo se basa en la construcción del cálculo sumatorio (cálculo integral) a partir de la suma de diferencias infinitamente pequeñas.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Leibniz utiliza un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pueden escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, logró introducir un nuevo *lenguaje* accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los *conceptos*, *procedimientos* y *argumentos*, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y d, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Aunque también, denota con dx y dy a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos/definiciones* o *procedimientos,* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce el símbolo $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas de rectángulos, y d para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, así como la regla de integración por partes, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

Así mismo, afirmaba que el proceso de integración, referido como proceso de sumación es inverso al proceso de diferenciación. Pronto se interesaría en la relación que existe entre dx y dy, y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito de 1676, titulado *Método inverso de tangentes*, Leibniz afirmaba que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

Configuración epistémica 4: El problema de la identificación de funciones elementales

Este problema, abordado anteriormente en el apartado 3.4, corresponde a uno de los sistemas de prácticas que identificamos y que lleva vinculada la configuración epistémica cuatro (CE 4) que se ha denominado “funciones elementales”. A continuación se describen los elementos de esta configuración mediante un problema prototípico propuesto por Euler y construido sobre los problemas y soluciones de Leibniz. Euler determinó la adición de una constante de integración al encontrar las función primitiva (antiderivada) y que en la actualidad conocemos como la constante de integración en la solución de una integral indefinida, que representa una familia de funciones de una función que ha sido derivada; de esta forma Euler distingue entre la integral particular (integral definida) y la integral completa (integral indefinida).

Euler utiliza un *lenguaje* nuevo en las matemáticas al adicionar una constante arbitraria para expresar la solución de la integral completa, que hoy se conoce como la adición de la constante de integración para representar una función que reúne la familia de funciones de una función al ser derivada. Sus *argumentos* para diferenciar la integral completa de la integral particular, llevan a lo que hoy conocemos como la antiderivada. Los aportes de Euler (1770), determinan con *definiciones* el hecho de que no todas las funciones tengan antiderivada o primitiva, pero sí puedan integrase a través de series trabajadas por Leibniz. Él lo describe como sigue:

> <u>Definición 5</u>. Si las funciones, que se buscan en el cálculo integral de una relación de los diferenciales, no se pueden mostrar en forma algebraica, entonces estas son llamadas trascendentes, ya que varias de ellas trascienden las competencias de análisis común (p. 5).

Euler, con la anterior definición advierte la forma en que debe ser abordada la antiderivada de una función. Euler prosigue su descripción sobre la forma de cómo abordar las funciones que no son elementales:

> Ahora, en el primer intento de resolver una integral, las funciones no deben buscarse inicialmente, primero debe tomarse como una función trascendental. A menudo sucede que una integral algebraica puede ser obtenida a través de operaciones hábiles. Si la función que se busca es trascendental, se debe considerar con cuidado si ésta puede ser reducida a funciones más simples, o expresada como una función logarítmica o de forma angular, en cuyo caso la solución algebraica puede ser comparada igualmente. Pero si esto no se logra, conviene investigar la forma más sencilla de las funciones trascendentales, hasta que se pueda reducir el integrando tratado, con el método más adecuado, con el fin que los valores más cercanos a las funciones a trascender se puedan producir.
>
> <u>Teorema.</u> Todas las funciones que se encuentran a través del cálculo de una integral son indeterminadas, se requiere una determinación por la naturaleza de la cuestión, que suministren la solución (p. 10).

Con el teorema anterior, Euler indica la forma de abordar funciones a través del cálculo integral, indicando qué hacer cuando estas no pueden ser expresadas en forma elemental. Esta indicación hace que encontremos la solución por métodos diferentes a los elementales (numéricos) haciendo que la función pueda ser integrable sin tener antiderivada; esto ocurre cuando hace referencia, en el teorema, a encontrar la solución de ellas (las integrales) “...por la naturaleza en cuestión que suministre la solución”, haciendo alusión al uso de métodos numéricos para la solución.

Pero la importancia del aporte de Euler está en la distinción que hace entre las nociones de integral completa –lo que conocemos hoy en día como integral indefinida o antiderivada–, y de integral, haciendo referencia a integrales definidas. Estas integrales definidas se pueden calcular, siempre y cuando se cumplan las condiciones de continuidad y de función elemental, a través de la aplicación de lo que hoy conocemos como Teorema Fundamental del Cálculo.

Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que se abordaron y desarrollaron en la diversas etapas históricas, han resultado en una propuesta de reconstrucción del significado global (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) de la antiderivada. Cada sistema de práctica tiene vinculada una configuración epistémica que esta compuesta de objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos). La herramienta que nos proporciona el EOS, conocida como configuración epistémica nos ha ayudado a identificar y describir estos elementos.

Cada una de estas configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial para la antiderivada. En nuestro caso concreto son cuatro: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE3); 4) *Funciones Elementales* (CE4).

El esquema de la Figura 2, muestra los *significados parciales* identificados, cada uno de ellos asociado a su respectiva configuración epistémica. Al igual muestra la relación entre algunas configuraciones de acuerdo a su generalización, así como la ubicación de la configuración en una línea de tiempo de acuerdo con su desarrollo.

Si bien cada configuración es única, el esquema de la Figura 2, muestra algunas conexiones entre configuraciones, estas conexiones descritas por una línea roja discontinua, que indican que con los elementos de dicha configuración es plausible resolver algunos situaciones-problemas de otra configuración.

En el caso particular de la cuarta configuración (CE4), es intensiva por sus conexiones a otros sistemas de practicas indistintamente del tiempo histórico en que se encuentren, dado que con los elementos de (CE4) se pueden resolver algún tipo de problemas de los sistemas de prácticas que llevan asociadas las configuraciones CE1, CE2 y CE3, respectivamente.

Por otra parte, el esquema de la Figura 2, muestra la evolución, respecto de los elementos y características, de las configuraciones epistémicas y, por ende, de los diversos significados de la antiderivada a través del tiempo. Lo anterior se indica con conexiones con líneas continuas de color azul. Esta evolución esta dada en el sentido de que una nueva configuración, toma elementos de una configuración establecida, dando paso a la nueva configuración. En nuestro caso son las configuraciones CE2 y CE3, las que toman elementos establecidos en la primera configuración (CE1), para activar nuevos elementos en dichas nuevas configuraciones, indistintamente de que estas configuraciones estén establecidas en la misma etapa histórica. De la misma forma actúa la configuración (CE4), al tomar elementos de la configuración (CE3).

La consideración conjunta de situaciones problema asociadas a sus respectivas configuraciones epistémicas y sus relaciones de evolución y/o solución de problemas, ilustrados en el esquema en la Figura 2, es lo que conforma nuestra propuesta de reconstrucción del *significado holístico de la antiderivada*.

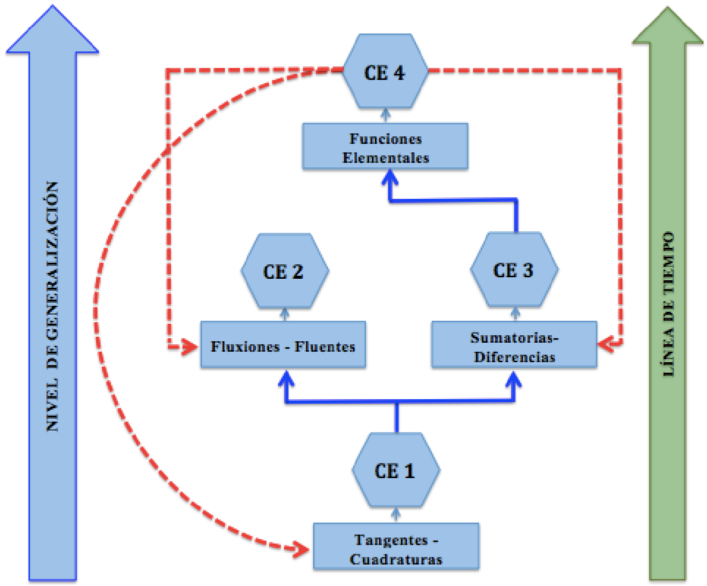

Figura 2. Significado Holístico de la Antiderivada.

Consideraciones finales

La propuesta de reconstrucción del significado holístico de los objetos matemáticos, en general, resulta especialmente importante porque a través de ellos se identifican significados parciales de un objeto en la historia. El análisis de problemáticas por medio de la herramientas del EOS, en particular de la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), permite describir de forma sistemática situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos, involucrados en las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos y que dieron paso al surgimiento y evolución de la antiderivada.

El estudio resultó en la identificación de cuatro configuraciones epistémicas que denominamos: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3); 4) *Funciones Elementales* (CE 4). Cada una de estas cuatro configuraciones epistémicas, a su vez, llevan asociado un significado parcial distinto para la antiderivada. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011), y a los resultados de este estudio, la herramienta *configuración epistémica* se prevé como una herramienta teórico-metodológica que permite determinar significados parciales para los objetos matemáticos.

El tipo de estudio histórico como el desarrollado en este trabajo es especialmente importante, coincidiendo con Doorman y Van Maannen (2008), por que permite dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. De esta manera, es indudable que esta propuesta es pieza clave para la comprensión del origen y evolución de la noción matemática antiderivada, puesto que nos proporciona conocimientos que podrían contemplarse en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de dicha noción.

Referencias

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *EMA*, *8*(1), 30-46.

Barrow, I. (1735). *Geometrical Lectures* (Translated from the Latin Edition by Edmund Stone). London: Cambridge University.

Boyer, C. (1959). The history the calculus and its conceptual developtmen. New York: Dover Publications, Inc.

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (Tesis Doctoral). CINVESTAV- IPN, Mexico.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Collete, J. (1985). *Historia de las matemáticas II.* México: Siglo XXI.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Crisostomo, E. (2012). *Idoneidad de Procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didactica del cálculo y el conocimiento profesional* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

D'Ambrosio, U. (2013). Priorizar história e filosofia da matemática. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8*(11),175-186.

Doorman, M., & Van Maannen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 4-14

Euler, L. (1770). *Intitutionum Calculi Integralis* (Vol. 1) (Translated from the Author's Latin Original). St. Petersburg.

Leibniz, W.G. (1920). *The early mathematical manuscripts of Leibniz*. New York: Dover Publications, Inc.

Mateus, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 3-21.

Newton, I. (1686). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Translated from the Author's Latin Original). London.

Newton, I. (1736). *The method of fluxions and infinite series* (Translated from the Author's Latin Original by John Colson). London.

Nikolski, S. (1985). *Elementos de Análisis Matemático*. Editorial Mir, Moscú.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistemica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.