



**Actas XIX Jornadas Nacionales de
Educación Matemática:
XIX JNEM 2015**

ISBN N° 978-956-9805-01-1



XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática

Villarrica, Chile. 2015

Pensamiento crítico y resolución de problemas en el contexto del programa tutores de la Universidad del Bío-Bío.	664
Taller de resolución de problemas: desarrollando habilidades en matemática.	669
Conjetura y demostración. Una propuesta didáctica para transitar de la aritmética al álgebra.	674
Construcción de un espacio de trabajo matemático en la formación de profesores.	678

Cítese como:

C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.), 2015. *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*. Villarrica: SOCHIEM.

Los trabajos aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM).

ISBN N° 978-956-9805-01-1
Editorial SOCHIEM

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO PARA UNA TAREA SOBRE LA ANTIDERIVADA

An example of ontosemioticanalysis for a task onantiderivative

Gordillo, W.^a & Pino-Fan, L.^b

^aUniversidad Distrital, ^bUniversidad de Los Lagos;
wgordillot@udistrital.edu.co^a, luis.pino@ulagos.cl^b

Resumen

En este trabajo se presenta resultados parciales de una investigación más amplia, en la cual se analiza una tarea matemática, su respectiva solución experta y la soluciones propuestas a la tarea por un grupo de estudiantes, con la herramientas teórico-metodológicas que proporciona el Enfoque Ontosemiótico (EOS), llamada análisis ontosemiótico. El fin es detallar análisis de contenido de la tarea y la solución experta (configuración epistémico) y caracterizar soluciones propuestas por estudiantes (configuración cognitiva). El ejemplo analizado, da argumentos válidos para determinar que la tarea matemática es evaluadora de conocimiento y comprensión parcial de la noción antiderivada, lo que resulta vital a la hora de construir o diseñar cuestionarios.

Palabras clave: *antiderivada, enfoque ontosemiótico, análisis ontosemiótico, diseño de cuestionarios.*

Abstract

This paper presents partial results of a wider investigation, in which a mathematical task, their respective expert solution and the proposed solutions to task by a group of students with the theoretical and methodological tools provided by the ontosemiotic approach (OSA) analyzed comes, called ontosemiotic analysis. The purpose is to detail the content analysis and expert task (epistemic configuration) solution and characterize solutions proposed by students (cognitive configuration). The example analyzed, giving valid arguments to determine the mathematical task is evaluating knowledge and partial understanding of the antiderivative, which is vital in building or designing questionnaires.

Keywords: *antiderivative, ontosemiotic approach, ontosemiotic analysis, questionnaire design.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos un ejemplo de una situación-problema en torno a la antiderivada, a la cual se propone una solución experta. La tarea y su solución son analizadas con la herramienta *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan & Font, 2015), proporcionada por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. En este trabajo utilizaremos la herramienta para realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea y para el análisis de las soluciones plausibles propuestas por el grupo de estudiantes a quienes se les aplicó la tarea. Así mismo enmarcamos la tarea dentro de un significado parcial de donde emerge la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, en prensa).

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA.

Inicialmente se propone una tarea y la solución experta, concretamente utilizamos la noción de *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan & Font, 2015), esta configuración pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o

personales, respectivamente. En este trabajo utilizaremos la herramienta *configuración ontosemiótica epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Esta noción es proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico*, y se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la práctica matemática sobre antiderivada, así mismo para realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea y la herramienta *configuración cognitiva* para caracterizar las soluciones plausibles propuestas por 137 estudiantes de carreras de matemáticas, pedagogía en educación media matemática e ingeniería civil, de varias universidades en Colombia.

Al mismo tiempo se utilizó un estudio histórico-epistemológico que ubica la tarea en la activación del significado parcial *diferencial-sumatoria* propuesto por Gordillo y Pino-Fan (en prensa).

CRITERIO PARA LA SELECCIÓN DE LA TAREA

Para la selección adecuada de la tarea, de acuerdo con el enfoque teórico que utilizamos, se adopta una mirada compleja sobre los objetos matemáticos y su significados, la cual lleva a pensar no en un objeto simple, sino en un sistema complejo formado por partes o componentes que deben articularse o conectarse entre sí (Rondero & Font, 2015). Recientemente se han publicado trabajos que se han interesado por describir y analizar esta complejidad para el objeto antiderivada. En particular, en Gordillo y Pino-Fan (2015) se ha modelizado el significado de referencia del objeto matemático antiderivada mediante una red de significados parciales en los cuales se activan las siguientes configuraciones ontosemióticas epistémicas: 1) relación geométrica de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; 2) relación entre fluxiones – fluentes; 3) relación de los diferenciales y las sumatorias; y 4) funciones elementales.

La tareaseleccionada ponen en juego alguno de los tipos de representaciones para la antiderivada (y también para las funciones asociadas a ésta): descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica), tabular, icónico y sinóptico (mapas conceptuales).

De esta forma, la tarea seleccionada ayuda a complementar a otras tareas que se propongan a fin de matizar entre sí, aspectos que aprovechen una comprensión parcial del objeto matemático.

ANÁLISIS DE CONTENIDO QUE EVALÚA LA TAREA

Esta tarea (Figura 1), es tomada de Delos Santos (2006) y Pino-Fan (2014), explora el conocimiento matemático en relación con otros objetos matemáticos que forman parte del currículo, como lo son: la integral indefinida de una función o el teorema fundamental del cálculo. Las representaciones que el estudiante debe manejar para la resolución de la tarea son: simbólica, gráfica y tabular.

Tarea: Para una función dada $y = f(x)$, continua en \mathbb{R} , se cumplen los valores de la siguiente la tabla

x	$f'(x)$
0	0
1	2
1,5	3
2	4
2,5	5

a) Encuentra una función para $f(x)$.

b) ¿Puedes encontrar una segunda expresión, distinta a la anterior, para $f(x)$? ¿Cuál sería? Justifica la respuesta.

Figura 1. Tarea propuesta

Solución Plausible

Existen varias soluciones para cada uno de los apartados de esta tarea, una posible solución de estas se analiza a continuación:

- a) Basándonos en los datos proporcionados en la tabla, es posible encontrar un patrón de la siguiente forma:

x	$f'(x)$
0	$2(0)=0$
1	$2(1)=2$
1,5	$2(1,5)=3$
2	$2(2)=4$
2,5	$2(2,5)=5$
.	.
.	.
.	.
x	$2(x) = 2x$

Por tanto, dado que $f'(x) = 2x$, y sabiendo que para una función $f(x) = x^n$ la derivada está dada por $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces una expresión para $f(x)$ sería: $f(x) = x^2$.

- b) Sí se puede; para encontrar otra expresión para $f(x)$ distinta a $f(x) = x^2$. Si $f'(x) = 2x$ entonces $f(x) = \int 2x dx = x^2 + C$. De esta forma, $f(x)$ puede ser cualquier función de la familia de funciones $f(x) = x^2 + C$ donde, $C \in \mathbb{R}$.

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Elementos Lingüísticos

- El enunciado de la tarea, denota una función indeterminada, en este caso, una función que cumple ciertas condiciones reguladas por una tabla de valores.

- La tabla de valores. Corresponde a la representación tabular de una función de una función desconocida de la cual se le presentan cinco imágenes para los valores de la variable x dados en la tabla, lo que proporciona parejas ordenadas del tipo $(x, f'(x))$. Dichas parejas ordenadas pueden ser llevadas al plano cartesiano para dar una representación gráfica a las parejas dadas.
- Las preguntas derivadas del enunciado, refieren a un procedimiento para hallar una función, que al ser derivada cumpla con las condiciones y los valores de la tabla.

Conceptos/Definiciones

- Función de variable real desconocida. Función $f(x)$ que se determinará a partir de su función derivada definida parcialmente por cinco puntos.
- Pares ordenados. Originales e imágenes de la función derivada dada.
- Función derivada de una variable real. Definida parcialmente por cinco puntos cuyas coordenadas se expresan de manera tabular.

Proposiciones/Propiedades

- Reglas de derivación. Concretamente “la derivada de una función constante es igual a cero”, la cual permite determinar que la función buscada es cualquiera de la familia $f(x) = x^2 + C$, donde, $C \in \mathbb{R}$.

Procedimientos

- Cálculo de la antiderivada $dey = 2x$, esto se realiza ya sea mediante las reglas de derivación (derivada de la función potencial), o mediante las reglas de integración. Este procedimiento origina la respuesta de ambos apartados de la tarea.
- Ensayo y error. Probando posibles reglas de correspondencia entre los valores de x y los de $f'(x)$, a partir de los valores dados en la tabla. Este procedimiento es de carácter numérico-técnico, centrado en la búsqueda de un patrón que permita establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada.

Argumentos

- La expresión algebraica de la función derivada es $y = 2x$ porque al ir evaluando los puntos dados tabularmente, $(x, f'(x))$; se deduce de manera empírica que es la función derivada.
- La función buscada es $y = x^2 + C$ porque la derivada de esta función es $y = 2x$. Establece la validez para la función $f(x)$ teniendo en cuenta la regla para derivar la función potencial.

Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no identifique la familia de funciones cuando se le solicita encontrar una expresión distinta a la encontrada, proporcionando funciones equivalentes.

ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES

A partir del análisis de las respuestas de los 137 estudiantes, encontramos para la primera parte de la tarea, las respuestas, y por ende, las características que permiten asociar las respuestas a una configuración cognitiva propuesta. La formación de las configuraciones cognitivas, esta dada por similitud de algunos elementos activados (lenguaje, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) en la solución de los estudiantes.

Las configuraciones cognitivas identificadas en el grupo de estudiantes se pueden resumir en los siguientes cuatro tipos:

- **Configuración Cognitiva 1: Gráfica-Técnica.** Respuestas en las que a partir del conjunto de datos dados en la tabla, se proporciona una representación gráfica de la cual se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos

- centrados en las “reglas” de derivación, se encuentra una expresión para $f(x)$.
- **Configuración Cognitiva 2: Numérica-Técnica.** Respuestas en las que a partir del conjunto de datos de la tabla se determina el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en las “reglas” de derivación, se encuentra una expresión para $f(x)$.
 - **Configuración Cognitiva 3: Numérica-Avanzada.** Respuestas en las que a partir del conjunto de datos de la tabla se determina el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en temas más avanzados en el currículo (como la antiderivada), se encuentra una expresión para $f(x)$.
 - **Configuración Cognitiva 4: Gráfica-Avanzada.** Respuestas en las que a partir del conjunto de datos dados en la tabla, se proporciona una representación gráfica de la cual se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en temas más avanzados en el currículo (como la antiderivada), se encuentra una expresión para $f(x)$.

Para la segunda parte de la tarea:

- **Configuración Cognitiva 1: Interpretación errónea sobre la unicidad de la derivada.** Respuestas en las que se tiene una concepción errónea sobre la unicidad de la derivada en un punto y la función derivada.
- **Configuración Cognitiva 2: Funciones equivalentes.** Respuestas en las que de forma explícita o implícita, mediante el uso de funciones equivalentes, hacen evidente que no es posible hallar otra función distinta.
- **Configuración Cognitiva 3: Técnica.** Respuestas en las que los procedimientos y argumentos se centran en las reglas de derivación (concretamente en la regla “la derivada de una función constante es cero”).
- **Configuración Cognitiva 4: Avanzada.** Respuestas en las que los procedimientos y sus justificaciones realizan de forma explícita una conexión con conceptos avanzados en el currículo tales como la antiderivada.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo, presentamos el análisis ontosemiótico de una tarea matemática para la antiderivada, este análisis nos permite evaluar y caracterizar el conocimiento y las prácticas matemáticas sobre la antiderivada, de estudiantes de los primeros cursos universitarios en carreras de matemáticas y afines a la matemática en Colombia.

Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerado en la selección de la tarea matemática, toda vez que para la resolución de una tarea se requieren de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada (Duval, 1995; 2006), como la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática. Significados propuestos en la reconstrucción del significado holístico de la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2015).

El análisis ontosemiótico (contenido), y las posibles dificultades en la resolución de la tarea; permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejo conjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes universitarios al resolver una tarea propuesta, al rededor del objeto matemático. Práctica donde se pueden identificar, la configuración de objetos matemáticos primarios; propuestos por el marco teórico del EOS, que se ha denominado análisis ontosemiótico.

De igual forma el análisis ontosemiótico (cognitivo), permite organizar la práctica matemática a partir de similitudes, para caracterizar y cuantificar soluciones a una tarea.

Este análisis ontosemiótico, se prevé como una herramienta potente para poder identificar, analizar

y tener un buen grado de validez de contenido en tareas matemáticas. Así mismo, organizar la práctica matemática que interviene en la solución. Este análisis ontosemiótico es una herramienta teórica metodológica del EOS, que es validada y utilizada en diseños de cuestionarios (Pino-Fan & Font, 2015 ; Pino-Fan, Godino & Font, 2015).

Referencias

- Delos Santos, A. (2006). *An investigation of student's understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment*. (Tesis Doctoral, University of Auckland, New Zealand). Recuperado de <https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/2161>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Switzerland: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (en prensa). *Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada*. *BOLEMA*.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). *A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers*. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME
- Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). *Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada*. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2015). *Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas*. *BOLEMA*, 29(51), 60-89. doi:10.1590/1980-4415v29n51a04
- Rondero, C., & Font, V. (2015). *Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética*. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49. doi:10.5565/rev/ensciencias.138