ALGUNOS CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN LA NOCIÓN DE LÍMITE EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA

Daniela Araya[1], Wilson Gordillo[2]
Universidad San Sebastián- Universidad de Los Lagos[1]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas[2], Colombia

Resumen: En este trabajo analizamos las respuestas a tareas propuestas sobre la noción de límite a estudiantes de pedagogía de educación media en matemática de un curso de cálculo diferencial. Utilizando herramientas del Enfoque Ontosemiótico, realizamos un análisis de las respuestas, en la relación a la tarea propuesta–estudiante, lo que permitió proponer categorías cognitivas comunes para detectar algunos conflictos semióticos en la introducción de la noción de límite.

Límite, pensamiento variacional, configuración ontosemiótica, conflicto semiótico

INTRODUCCIÓN

La noción de límite ha tenido gran interés en investigaciones como la de Artigue (1995), Blázquez y Ortega (2001), entre otros. Han sido muchos los elementos que se analizan en esta noción, entre ellos errores, dificultades de enseñanza y aprendizaje.

El propósito de esta investigación es identificar los conflictos semióticos que tienen los estudiantes cuando se les pide resolver tareas que introducen la noción de límite. Asimismo, analizamos las respuestas dadas por los estudiantes con las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico (Godino, 2002), con este análisis se busca categorizar algunos conflictos semióticos que se presentan en los estudiantes con la noción.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo utilizamos la noción de *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan & Font, 2015), proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico* (EOS). Esta configuración puede ser de carácter epistémica o cognitiva, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. Se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la practica matemática, además, permite realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea. ~~y~~ La herramienta *configuración cognitiva* ayuda caracterizar las soluciones plausibles y de esta forma permite identificar posibles *conflictos semióticos* definidos como "disparidad o diferencia de interpretación entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)." (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 133).

METODOLOGÍA

Inicialmente se diseña varios tipos de tareas, las respuestas institucionales a las tareas fueron analizadas con la herramienta configuración ontosemiótica epistémica para identificar los objetos matemáticos primarios. Posteriormente se aplica el reactivo a 17 estudiantes de pedagogía media en matemática que cursan cálculo diferencial. Se analizan las respuestas dadas por los estudiantes con la herramienta *configuración ontosemiótica* y se contrastan en las respuestas institucionales para encontrar coincidencias o disparidades con el fin de identificar conflictos semióticos en la noción de límite.

TAREAS PROPUESTAS

El cuestionario propuesto consta de 5 tareas, cada una de ellas aborda la noción de límite desde su significado personal hasta el uso de la definición atribuida a Weierstrass. (citado en Bottazzini, 1986).

A modo de ejemplo en la tabla 1, se presenta la tarea 3 del cuestionario acompañada de la respuesta institucional.

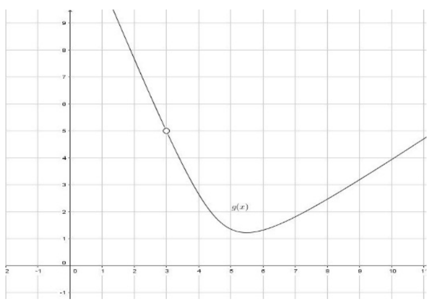
Tarea 3	Respuesta Institucional
Considere la función $\boldsymbol{g}$, tal que $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R} - \{\mathbf{3}\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\mathbf{5}\}$ tenga la siguiente gráfica.  ¿Existe $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ tal que si $\|\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\| < \boldsymbol{\delta}$ entonces $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{5}\| < \mathbf{0{,}000004}$? Justifique su respuesta.	Según la gráfica de $\boldsymbol{g}$, se tiene que existen los límites laterales de $\boldsymbol{g}$ en el punto $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$, $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 5 \; y \; \lim_{x \to 3^+} g(x) = 5.$ Por tanto, existe el límite en $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$, $\lim_{x \to 3} g(x) = 5$ que es equivalente a afirmar $\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0},\ \exists\, \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}\ \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{\delta}\ (\boldsymbol{\varepsilon},\ \mathbf{3})\ \boldsymbol{tal\ que\ si}$ $\|\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\| < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{5}\| < \boldsymbol{\varepsilon}$. En particular para $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0{,}000004}$ existe $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ tal que cumple con la condición solicitada.

Tabla 1: Tarea 3 y respuesta institucional

Con la respuesta institucional se hace un análisis ontosemiotico de las tareas, como el propuesto por Gordillo y Pino-Fan (2015), para reconocer los objetos matemáticos involucrados en la respuesta. A continuación, se muestran algunos de los objetos identificados.

Elementos lingüísticos: son los símbolos, las notaciones y las expresiones algebraicas que denotan la noción de límite, por ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} g(x) = 5$$

Situaciones/Problemas: en este caso sería la tarea propuesta.

Conceptos/Definiciones: sería la descripción de límites, mediante símbolos $\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0},\ \exists\, \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}\ \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\ \mathbf{3}\right)\ \boldsymbol{tal\ que\ si}\ |\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{5}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Proposiciones/Propiedades: La proposición involucrada que ayuda a resolver esta tarea es el teorema de existencia de límite.

Procedimientos: El procedimiento utilizado, es particularizar el radio ε.

Argumentos: Los argumentos se desprenden de la gráfica de la función g y la aplicación del teorema de existencia de límite.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se hace el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen, cada respuesta es comparada con el fin de identificar elementos comunes y de esta forma caracterizar cognitivamente las respuestas dadas.

Un ejemplo de análisis de las respuestas dadas por los dos estudiantes (E1 y E2), se presenta en la figura 1.

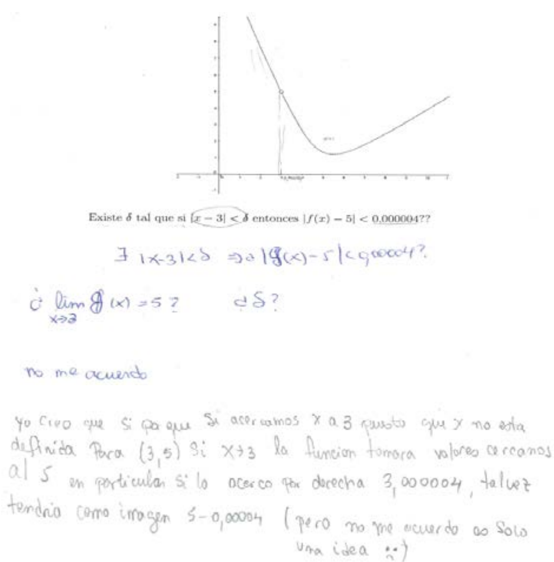
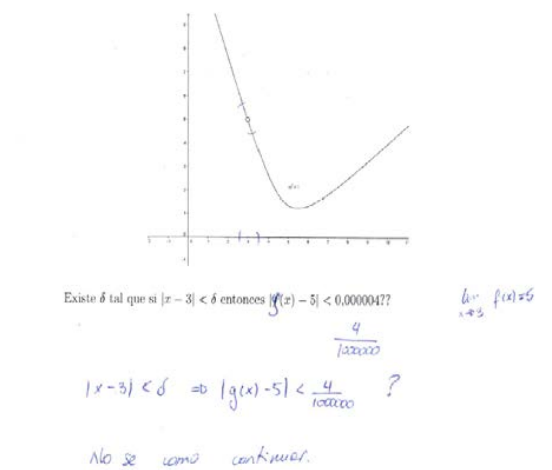
E1	E2
	 No justifica.

Figura 1. Respuestas estudiantes E1 y E2.

En las respuesta~~s~~ dada~~s~~ por el estudiante (E1), se identifican los siguientes elementos lingüísticos verbales y algebraicos a través de los cuales aborda los conceptos/definiciones de límite. El uso de la gráfica, es primordial al señalar en la curva que representa la función, la posible existencia del límite en el punto dado. Las proposiciones/propiedades que utiliza están dadas por el teorema de existencia de límite, el cual ~~se~~ es expresada de forma verbal. Sus argumentos están dados al usar verbalmente la demostración solicitada. Por último, no se identifica en la respuesta de este estudiante algún tipo de procedimiento algorítmico. Con respecto al estudiante E2, se puede inferir que los conceptos/definiciones de límite se identifican de manera gráfica, dado que identifica los intervalos y “raya” la curva. Las proposiciones/propiedades utilizada~~s~~ es el teorema de existencia de límite, que es expresada mediante el análisis de la gráfica de la función y por medio de ésta afirma la existencia de límite. Sin embargo, la respuesta no muestra argumentos que justifique sus procedimientos.

CONCLUSIONES

Al comparar los objetos matemáticos primarios de las respuestas entregadas por los estudiantes, con el desglose de los objetos matemáticos primarios de la respuesta institucional, se evidencia disparidad entre cada uno de estos elementos, esta disparidad lleva a inferir un conflicto semiótico (Godino, Batanero & Font, 2007), entre la institución y los estudiantes, esto conlleva a que la noción de límite pueda generar mala comprensión, a pesar que se identifica e interpreta correctamente en la gráfica de la función. Sin embargo, esta concepción carece de significado dado que no pueden interpretar la definición propuesta por Weierstrass y resolver la tarea solicitada. Este hecho se puede deber a que la enseñanza de esta noción, se basa principalmente en el cálculo de límites de forma algorítmica la cual está desprovista de significado. (Férnandez, 2000).

Por otra parte, se validan las herramientas propuestas por el EOS las cuales se prevén como potentes para el análisis de contenido de tareas y respuestas, este análisis ontosemiótico (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) permitió el desglose de objetos matemáticos primarios, que con características comunes generaron configuraciones cognitivas de la noción.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo editorial Iberoamérica.

Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: A history real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlang.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 219-236.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Fernandez, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(2), 171-187.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education.* 39(1), 127-135.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2015). Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea de antiderivada. En Vásquez, C,. Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F., Solar, H., Chandía, E., & Parraguez, M. (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*, (pp.170-175). Villarica: SOCHIEM.

Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.