

## Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto

Wilson Gordillo<sup>(1)\*</sup>, Wilson J. Pinzón<sup>(1)</sup> y José H. Martínez<sup>(2)</sup>

(1) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales, Carrera 5° Este N° 15 – 82, Bogotá-Colombia (e-mail: wgordillot@udistrital.edu.co, wjpinzonc@udistrital.edu.co)

(2) Universidad Santo Tomas, Departamento de Ciencias Básicas, Carrera 9 N° 51-11, Bogotá-Colombia (e-mail: josemartinez@usantotomas.edu.co)

\* Autor a quien debe ser dirigida la correspondencia

*Recibido Ago. 26, 2016; Aceptado Oct. 17, 2016; Versión final Dic. 11, 2016, Publicado Abr. 2017*

---

### Resumen

Este estudio determina la utilización de mapas conceptuales como técnica de análisis de libros de texto de cálculo diferencial, con el objeto de identificar los obstáculos epistemológicos sobre la noción derivada. La investigación se centra en los postulados de mapa conceptual de Novak y Cañas y el significado holístico de la derivada. La metodología es descriptiva, pues se diseña un mapa conceptual para la noción derivada y se contrasta con los elementos que se abordan para la enseñanza de la noción en un libro de texto de cálculo diferencial. Los resultados obtenidos muestran representaciones y conceptos asociados a la derivada que el autor del texto no aborda, evidenciando la falta de estructura para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada.

*Palabras clave: mapa conceptual; derivada; cálculo diferencial; obstáculos didácticos; significado holístico*

## Concept Mapping: a Technique for the Analysis of the Notion of Derivative in a Textbook

### Abstract

This study determines the use of concept maps as technical analysis textbooks of differential calculus, akin to identify some epistemological obstacles on the derivative notion. The research focuses on the principles of conceptual map of Novak and Cañas (2008) and the holistic meaning of the derivative. The methodology is descriptive, designed as a conceptual map for the derivative concept and it is compared with the elements that are addressed to teaching the concept in a textbook of differential calculus. The results show representations and concepts associated with the derivative that the author of the textbook does not address, highlighting the lack of structure to enhance learning of the notion of derivative.

*Keywords: conceptual map; derived; differential calculus; educational obstacles; holistic meaning*

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo es resultado de una investigación orientada a la elaboración de recursos didácticos de diferente naturaleza, utilizados para identificar algunos obstáculos didácticos presentes en la enseñanza del cálculo diferencial, particularmente en la noción de derivada que se presenta en los textos de cálculo diferencial. Inicialmente se presentan los fundamentos teóricos que se usan para construir algunos mapas conceptuales, que se contrastan con la noción de derivada y la forma como se aborda en el libro de texto de “Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas” de Stewart (2008).

La derivada es un concepto considerado clave en el estudio del cálculo, lo que ha motivado que varias investigaciones se centren en éste (Sánchez-Matamoros et al., 2008; Canul et al., 2011; García et al., 2011; Pino-Fan et al., 2015). Cada investigación ha abordado desde la comprensión del objeto hasta la construcción de significados parciales; así mismo han estudiado los diversos aspectos y conceptos asociados como: la representación gráfica, la pendiente de la tangente a la curva, el límite del cociente incremental y su carácter puntual o global. Por otra parte, los mapas conceptuales han sido utilizados como agente constructor de conocimiento, de acuerdo con lo establecido por Novak (1998), al determinar que en la elaboración de los mapas conceptuales los estudiantes relacionan información nueva y relevante con los conocimientos previos, generando relaciones simbólicas significativas representadas de manera consciente en los esquemas, cuya calidad indica el nivel de apropiación conceptual.

Esta postura es coincidente con Ausubel et al. (1983) respecto del aprendizaje significativo, al afirmar que la construcción de un mapa conceptual es sencilla y compleja a la vez, dado que se requiere realizar varias operaciones mentales. Según Novak y Cañas (2008), un mapa conceptual es una herramienta de organización jerárquica de conceptos (regularidades percibidas en sucesos u objetos, o registros de sucesos u objetos, designadas mediante etiquetas) y de determinación de relaciones entre estos conceptos, que constituyen proposiciones o unidades semánticas coherentes (sentencias que permiten una descripción autosuficiente de un objeto o suceso contenido en el universo de estudio). De otra parte, Bencomo et al., (2004) afirman que los mapas conceptuales pueden ser interpretados como modelos sinópticos de descripción estructurada de un sistema, que suelen ser representados mediante grafos, en cuyos vértices se colocan objetos; esta forma sinóptica es abordada por Gordillo y Pino-Fan (2016) en la construcción de tareas de cálculo diferencial, para evaluar la comprensión de una noción matemática en particular.

De acuerdo con la propuesta de Novak y Cañas (1988), un mapa conceptual es un medio sencillo que cognitivamente ayuda en la enseñanza y el aprendizaje, representando una proyección muy *práctica* del aprendizaje significativo, constituyéndose en un modelo de destrezas y habilidades, por lo que proponen que un mapa conceptual contiene tres elementos fundamentales: a) Concepto, referido a un objeto que se designa mediante un término desde la perspectiva de un individuo, que se concibe en imágenes mentales; b) Proposición o enlace de uno o *más* términos que tiene valor de verdad; c) Palabra-enlace, que señala la relación semántica de uno más términos.

En la enseñanza de las matemáticas, el uso de los mapas conceptuales ha permitido identificar el nivel de comprensión matemática tanto de los estudiantes como de los profesores, siendo una herramienta que permite familiarizarse con el avance en la construcción del conocimiento, en ellos se puede evidenciar cómo emergen los objetos matemáticos desde la práctica (Font et al., 2013). La construcción de mapas conceptuales en la enseñanza de las matemáticas, permite desarrollar con claridad los conceptos, jerarquías, relaciones, así identificar los errores conceptuales; la noción de error presenta diferentes acepciones, definidos por De la Torre (1993) como: la falta de verdad, la incorrección por falta de conocimiento, una equivocación, un desajuste conceptual o moral, un sensor de problemas.

Por otra parte el término obstáculo representa la dificultad generada por la utilización de un conocimiento, que habiendo sido útil en determinada situación, deja de serlo en un contexto diferente. De acuerdo con Bachelard (2000), la noción de obstáculo didáctico surge en el proceso de aprendizaje por la confrontación de conocimientos que efectúa el estudiante; que deben ser enfrentados y superados para lograr un conocimiento científico. Según Brousseau (1997), la noción de obstáculo didáctico está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación, ciertos conocimientos del estudiante están ligados a conocimientos anteriores que a menudo son provisorios, imprecisos y poco correctos. Cabe en este punto aclarar que la noción de obstáculo aún está en vías de construirse y diversificarse, por lo que no es fácil establecer generalidades pertinentes sobre el tema, haciéndose válido el estudio de casos particulares; esta noción tiende a extenderse fuera del campo de la epistemología para ser considerada también en los campos de la didáctica, psicología, y otras disciplinas.

## OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO

Uno de los objetivos de esta investigación es identificar obstáculos epistemológicos en la enseñanza de la noción de derivada, por tal razón se profundiza un poco más en este tipo de obstáculo, que puede ser

determinado como una dificultad intrínseca a los conocimientos. Brousseau (1997) introdujo en la didáctica esta noción de obstáculo epistemológico como un medio para cambiar el estatus del error, así fue posible mostrar que el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, como lo conciben las teorías conductistas, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, que incluso habiendo sido exitoso se presenta como falso o inadaptado. Para Farfán (1996) la noción de obstáculo epistemológico ha permitido el surgimiento de la didáctica como disciplina, independiente de aquellas en las que se apoyó al inicio (epistemología, psicología, sociología, lingüística, etc.) construyendo sus propios referentes de explicación, como: la teoría de situaciones, los conceptos dialécticos herramienta/objeto, el juego de contextos, entre otras.

Desde la epistemología de las ciencias, el error ha sido considerado un elemento de construcción de conocimiento. Bachelard (2000) plantea la noción de obstáculo epistemológico para referirse a la aparición de errores en la construcción de conocimiento, sus fundamentos son tomados por Brousseau (1997) al distinguir error y obstáculo: el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos (p. 84). Mientras que, un obstáculo es una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro; debido a su éxito previo, se resiste a ser modificado o rechazado, en otras palabras, es una barrera para un aprendizaje posterior.

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico, de acuerdo con Brousseau (1997), tienen causas variadas, por ejemplo, una concepción del aprendizaje, siendo difícil e incluso incorrecto incriminar a sólo uno de los sistemas de interacción (estudiante–estudiante, estudiante–docente, estudiante–contenido, ambiente físico y social). En consecuencia, los obstáculos didácticos se pueden clasificar en: a) ontogénicos, los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en un momento de su evolución, el sujeto desarrolla conocimientos apropiados a su medio y objetivos. Al respecto, la epistemología genética evidencia la existencia de dos instrumentos de aprendizaje: la asimilación y acomodación; b) de enseñanza ó aprendizaje, surgen del modo como se enseñan los conocimientos de acuerdo a un modelo educativo específico y están inmersos en la transposición didáctica del concepto matemático, por consiguiente pueden ser evitados o superados; c) epistemológicos, que refieren a las dificultades intrínsecas a los conocimientos; es posible encontrarlos en la historia de los conceptos mismos, lo que no implica que se habrán de reproducir en una situación escolar necesariamente las mismas condiciones históricas en que se han superado. Esta clasificación de obstáculo tiene como propósito ubicar la fuente que lo está generando.

Los obstáculos epistemológicos están relacionados con la transición entre los diferentes tipos de representación de un concepto matemático, donde se encuentra el pasaje entre un campo semiótico significativo, estos pueden ser reconocibles en la historia de la matemática, permitiendo comprender ciertas dificultades (obstáculos) que se evidencian en el aprendizaje de este conocimiento. En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo epistemológico desarrollada por Bachelard (2000) “*se conoce afrontando un conocimiento anterior, destruyendo los conocimientos mal adquiridos o superando aquello que en el espíritu mismo obstaculiza la espiritualización. Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar la investigación*”.

Por su parte Duroux (1982) establece una serie de condiciones que debe satisfacer un obstáculo para que sea considerado de tipo epistemológico, entre las que se encuentran: a) un obstáculo es un conocimiento, una concepción, no una dificultad o falta de conocimiento; b) este conocimiento produce respuestas correctas en un determinado contexto que el estudiante encuentra a menudo, pero genera respuestas falsas fuera del contexto; c) este conocimiento se manifiesta resistente a las contradicciones (a las cuales se confronta) y a la sistematización de un conocimiento mejor; d) después de la toma de conciencia, de su falta de precisión, este conocimiento continúa manifestándose de manera intempestiva y obstinada. De igual forma Spagnolo (2006) completa la definición de obstáculo epistemológico, utilizando una interpretación semiótica de los lenguajes matemáticos, afirmando que el obstáculo epistemológico está relacionado con el pasaje entre el campo semántico –significativo en una cierta época histórica de la comunidad matemática– y el tentativo de la misma.

## METODOLOGÍA

Esta investigación se enmarca la metodología de tipo descriptivo, en donde participaron seis docentes que imparten el curso de cálculo diferencial en la Facultad del Medio Ambiente y Recursos Naturales de la Universidad Distrital en Colombia. Como técnica de recolección de información se usó inicialmente la construcción individual de mapas conceptuales en relación con la noción de derivada, a partir del concepto de

recta tangente donde se evidencie un desglose entre las concepciones históricas de su desarrollo, representaciones y conexiones con otros elementos del cálculo. De igual forma se solicita la elaboración de un mapa conceptual para el concepto de velocidad instantánea y de *límite*. El tiempo para la elaboración individual de los mapas solicitados es de dos semanas y luego se hacen reuniones semanales para la construcción robusta del mapa conceptual.

Cada uno de los mapas elaborado por los docentes es compartido con sus compañeros generando colaboración entre ellos, con el fin de obtener un mapa conceptual cada vez más robusto; para el proceso de validez del mapa se usan los diferentes significados parciales propuestos en la reconstrucción del significado global para la derivada (Pino-Fan et al., 2015). Este significado global abarca un estudio epistemológico, que de acuerdo con Anacona (2003), aporta elementos que refieren a sus distintas concepciones, en los que se analizan las posibles dificultades que se presentaron en la construcción de éstos, que en coincidencia con Doorman y Maanen (2008), realzan el hecho de que los estudios epistemológicos son importantes, puesto que permiten dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. El objetivo de obtener un mapa robusto es compararlo con la forma como aborda el concepto de derivada el libro de texto que se usa en los cursos de cálculo diferencial en la Universidad Distrital, en este caso, el texto “Cálculo en una variable. Trascendentes Tempranas” de James Stewart (2008), revisando específicamente sus representaciones, conceptos, definiciones y argumentos, para determinar la ausencia de contenidos o representaciones que lleve a identificar un obstáculo epistemológico en el texto.

Este tipo de contraste es una nueva de forma dar uso a los mapas conceptuales, al caracterizarlo como instrumento válido de un concepto que se quiere enseñar, en donde se interactúa con el conocimiento previo de los estudiantes, dando lugar, muchas veces, a un conjunto diverso de aprendizajes no deseados. A través de ellos es posible detectar errores de tipo conceptual y a su vez visualizar la evolución del concepto a lo largo del tiempo. Así mismo, este instrumento permite de alguna manera determinar el nivel de profundización del concepto que pretende manejar el autor de un texto –el cuál es el objetivo de la investigación– y cómo interactúa con el conocimiento presentado en la instrucción formal; dentro de este proceso de aprendizaje se pueden originar errores conceptuales, que se constituyen en oportunidades para el desarrollo del pensamiento creativo y crítico, como afirman González et al. (2001).

A su vez en esta investigación se pretenden determinar los obstáculos que están asociados a las perspectivas que toma un autor cuando elabora un texto de matemáticas en particular. Así mismo, revisar los errores que cometen los docentes en la enseñanza y que pueden transformarse en obstáculos, en el momento que un estudiante reconstruye ideas.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para la construcción del mapa conceptual robusto de la noción derivada de la presente investigación, se utilizó el estudio epistemológico propuesto por Pino-Fan et al. (2015), y la construcción colectiva de los docentes que participaron en el estudio, incluyendo el ideograma (idea en forma sintética) de la noción de derivada vinculando sus formas de representación y la manera como ha sido abordada la noción matemática, es decir, conceptos, definiciones y posibles conexiones que existen entre ellas y las asociadas a la enseñanza del concepto. En la figura 1 se muestra el mapa conceptual construido de la noción derivada abordada desde la noción de recta tangente a una curva, evidenciando sus formas de representación (verbal, geométrica, algebraica y numérica) y sus conexiones para activar cada una de estas representaciones.

El mapa conceptual de la figura 1 se considera como un análisis macroscópico de los objetos matemáticos, dado que permite, desde el análisis epistemológico, hacer una verificación global del concepto, sus representaciones e ideas asociadas a la noción, el análisis de la particularidades introducidas en el mapa conceptual favorece la reflexión sobre los obstáculos en la construcción del conocimiento matemático. Este mapa conceptual facilita la presentación del concepto y del contenido más intrínseco donde es posible detectar errores, y de igual forma permite la retroalimentación. Este proceso de construcción del mapa conllevó a una forma estructural del concepto así como al uso de palabras enlace, en el sentido que se facilita la conexión entre conceptos asociados a la noción.

El mapa de la figura 1 se compara con otro mapa conceptual resultado del análisis del texto de Stewart (2008); en dicho proceso se analiza la presentación del origen de dos tipos de obstáculos didácticos diferenciados: 1) los que resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza (obstáculos de origen de enseñanza), centrados en dos aspectos de la construcción del conocimiento: uno relacionado con el uso del lenguaje del cálculo, y otro con los contextos de ejemplificación y experimentación para la construcción del conocimiento. Y 2) los relacionados intrínsecamente con el propio concepto, conteniendo parte del significado del mismo (obstáculos de origen epistemológico).

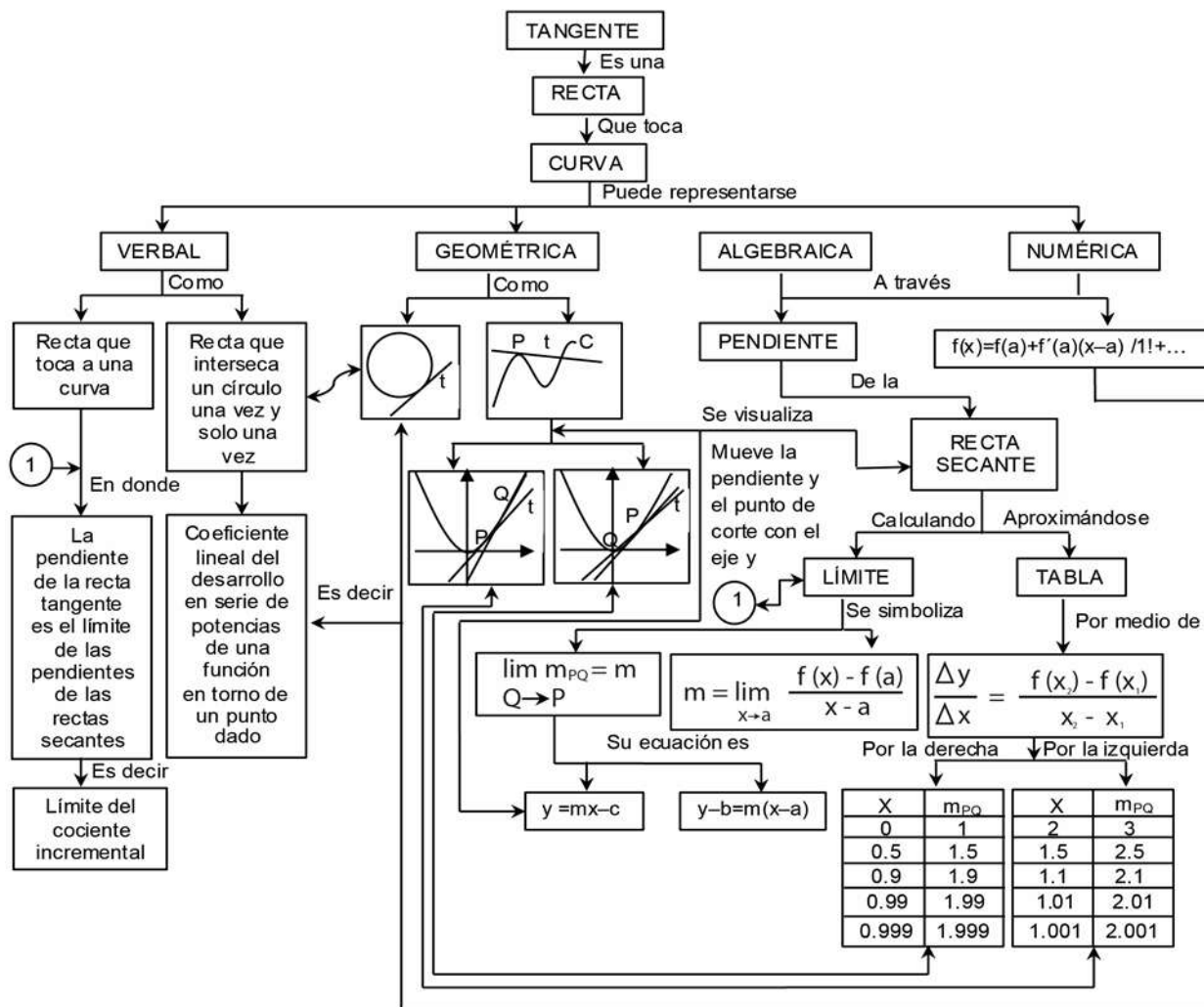


Fig. 1: Mapa conceptual para la derivada desde la noción de recta tangente elaborado por los expertos

Los obstáculos relacionados con la terminología que utiliza el autor – Stewart (2008) – se refieren al uso de un lenguaje cotidiano para otorgar significado a un concepto científico. En la figura 2 se puede observar el mapa conceptual del libro de texto y su comparación con el mapa conceptual construido con base al aporte epistemológico; allí las representaciones y conexiones que el texto comparado no trabaja o aborda se muestran con líneas discontinuas. Por ejemplo, se observa el uso del término recta tangente, en donde se ve que no hay un paso de una concepción global (propia de la Geometría Euclidiana) a una concepción local (propiedad fundamental del cálculo); concepto tratado en otras investigaciones (Connul et al., 2011). El obstáculo epistemológico se presenta cuando se forma el concepto de derivada por la vía geométrica basado en la concepción griega de tangente, esta concepción asume que la recta es (toda ella) tangente a una curva si la toca pero no la corta, lo que dificulta la aceptación de que la recta (además de tocar) puede cortar a la curva y ser tangente en la zona de corte, quedando este aspecto sin ser tratado en la sección.

Además el texto presenta obstáculos en el uso de la terminología matemática. El lenguaje matemático adquiere la facultad, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, de facilitar la expresión de los conceptos, pero se puede configurar en un obstáculo al otorgarle más importancia a la notación que al significado del concepto.

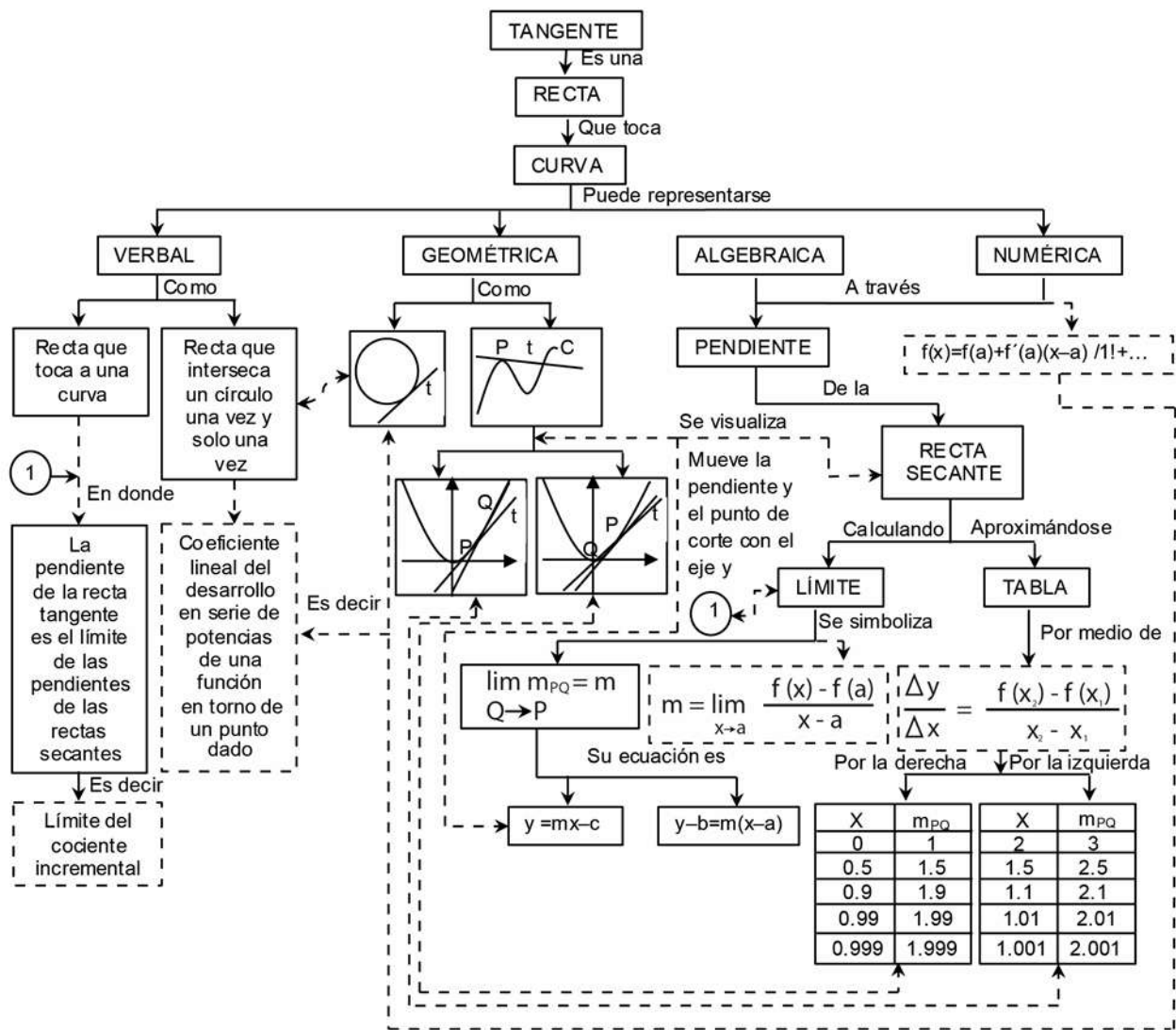


Fig. 2: Mapa conceptual del libro de texto para la derivada desde la noción de recta tangente

Otro obstáculo identificado es la concepción dinámica (sucesión de secantes), este se presenta cuando se enseña la derivada apoyada en la concepción dada por D'Alambert, quien interpretó la recta tangente como el resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes; debido a la conservación del carácter estático en la determinación de la tangente en la geometría euclidiana (pues es dada como un lugar geométrico), es difícil comprender que por medio de una sucesión de secantes se obtenga realmente la tangente. De igual manera, en el intento de relacionar la recta tangente con una estructura conceptual no se establece dicho enlace; esto se observa en el mapa conceptual de la figura 2, cuando se unen los conceptos con las líneas discontinuas, obstaculizando la posterior construcción y comprensión de nuevos conceptos que dependen de la concepción de recta tangente a partir de la sucesión de rectas secantes, impidiendo la generalización de la noción de recta tangente.

La construcción del mapa conceptual de la figura 2 se centra en el problema de encontrar la tangente a una curva dada, problema que en sus comienzos fue estudiado desde la geometría pura pero con importantes aplicaciones en el dominio de la óptica y la mecánica. El concepto mismo de tangente no estaba claro, pues la concepción griega de línea que toca a la curva en un solo punto y se encuentra a un lado de la misma no era suficiente para curvas que iban más allá de las cónicas.

Otro de los problemas planteados en el texto de Stewart (2008) se centra en calcular el ritmo de cambio, en el que se pretende llegar al concepto de velocidad instantánea a través del mundo de los sentidos, del cual escapa una y otra vez, lo que provoca un claro rechazo hacia el concepto de velocidad instantánea. En el mapa conceptual de la figura 3 se muestra un ejemplo de mapa conceptual de la noción velocidad instantánea tal como se presenta en el libro de texto, en donde igualmente se evidencian usos de la notación algebraica  $\Delta y / \Delta x$ ; notación que puede generar más inconvenientes que ventajas cuando se toma en consideración la complejidad de este proceso de variación, pues se define la derivada en un punto como el límite de un cociente.

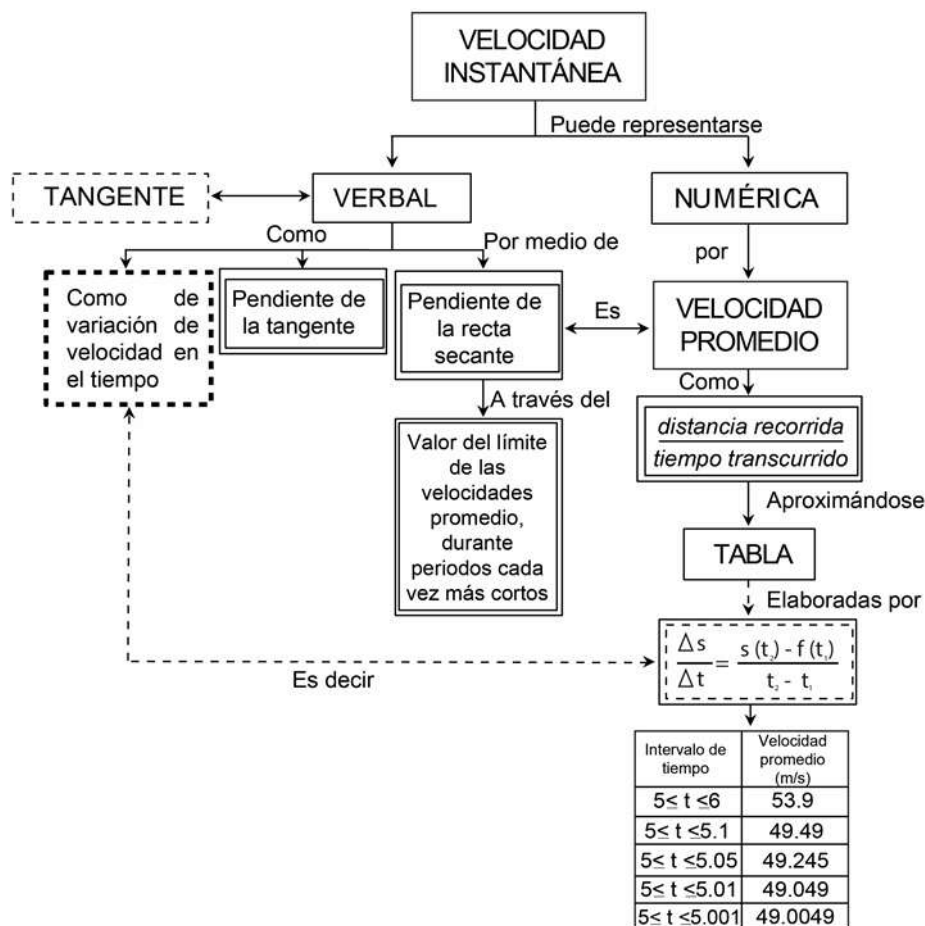


Fig. 3: Mapa conceptual de la velocidad instantánea tal como se presenta en el libro de texto

En la ecuación (1) se muestra matemáticamente esta definición. Aunque al introducir este tipo de notación no se explicita que con ella se puede calcular más fácilmente la indeterminación de la forma 0/0, forma que aparece al buscar la derivada de las funciones polinómicas en  $x=a$ , ya que basta con simplificar y no será necesario utilizar la división por la regla de Ruffini para expresar en factores el numerador. En la ecuación (2) se muestra la división.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2}$$

Esto evidencia el problema de calcular el ritmo de cambio, en donde el concepto de rapidez media resulta insuficiente, al no poder calcular la rapidez en un instante.

Otra de las nociones del cálculo para abordar la derivada es la noción de límite, las representaciones en las que se aborda este concepto en el texto de cálculo de Stewart (2008) son las representaciones descriptivas, gráficas, numéricas y algebraicas; desde esta noción se puede construir un mapa conceptual partiendo de la jerarquía del concepto y de la representación algebraica, desglosándose hasta llegar a la definición precisa del límite propuesta por Weierstrass, dada en términos de epsilon-delta ( $\epsilon$ - $\delta$ ), que se vuelve optativa, mostrando que el enfoque que prioriza la estructura del contenido busca la aplicación de la derivada.

El texto de Stewart (2008) da cuenta de las habilidades para hacer conversiones transitando por las diferentes representaciones (verbal, algebraica, numérica, geométrica), así mismo predomina la preponderancia de los procedimientos de carácter algorítmico algebraico, ligados más a procedimientos de carácter puntual centrados en la noción de convergencia, generando el obstáculo de la derivada en un punto o derivada puntual. Además al ver la derivada como un límite se manifiesta en la tendencia a evadir los procesos infinitos y a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, se considera el límite sólo como una aproximación.

Por último se introduce la noción de la derivada, a través del el concepto de límite; en la figura 4 se muestra otro ejemplo de mapa conceptual del concepto de derivada, en donde se observa que se define primero el macro-objeto  $f'(a)$  y posteriormente el macro-objeto  $f'(x)$ , en donde Stewart como autor del texto no es consciente de la dificultad de este paso o bien no le presta la atención que se merece. De igual manera, se hace la interpretación de la derivada como una razón de cambio en donde se introduce la notación incremental, dada como un límite de incrementos; en la ecuación (3) se muestra este incremento.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3}$$

Para después introducir la notación diferencial  $\frac{dy}{dx}$  y de esta forma poder usarla, pero no utiliza la diferencial  $dy$  como una aproximación lineal a  $\Delta y$ .

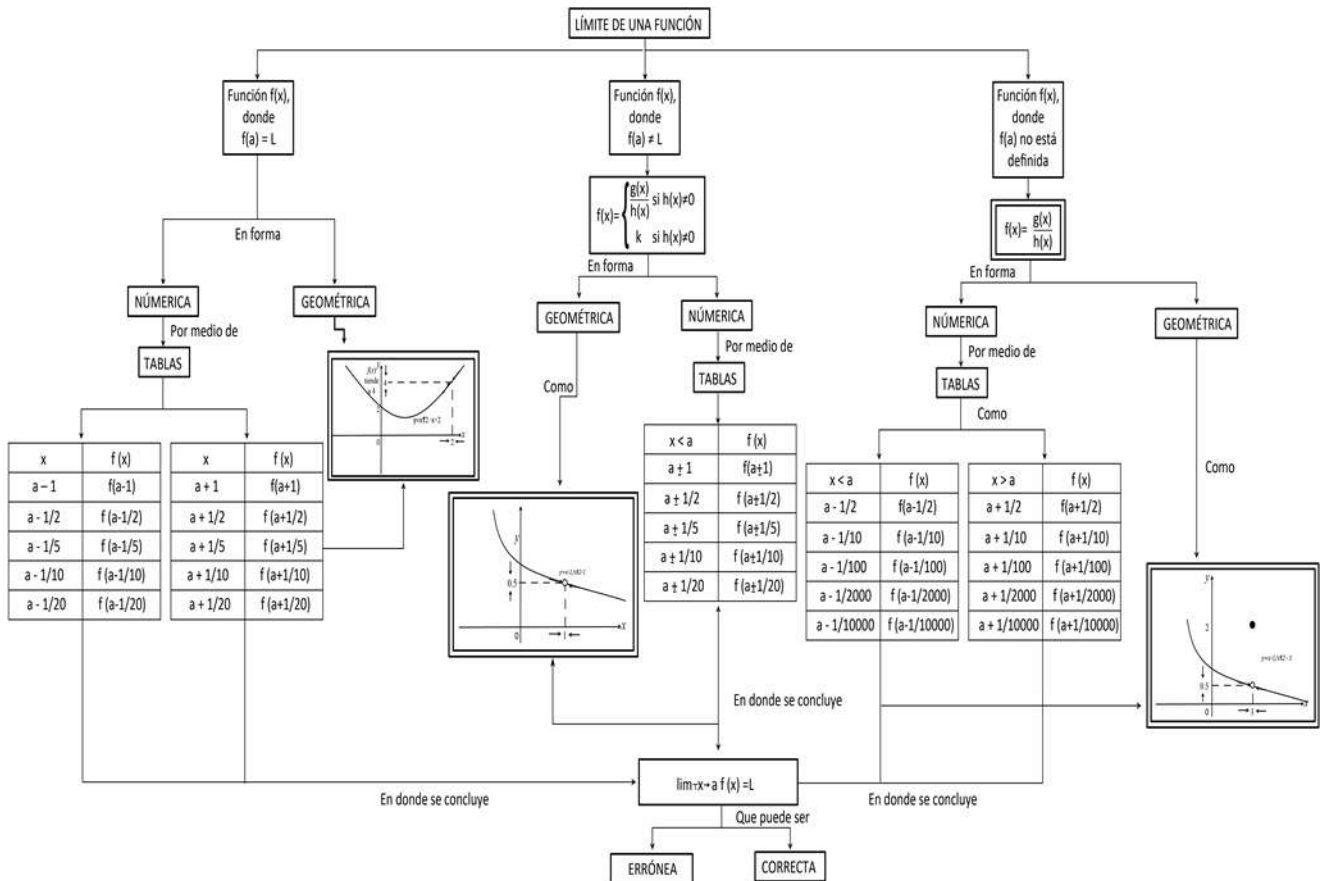


Fig. 4: Mapa conceptual del libro de texto sobre el concepto de derivada como límite de una función

**CONCLUSIONES**

Desde una perspectiva innovadora e investigativa, los mapas conceptuales son una fuente de información para que un profesor pueda regular el proceso de enseñanza y aprendizaje que se lleva a cabo a partir de los textos. Dicha regulación se realiza desde dos perspectivas diferenciadas que se refieren al conocimiento que posee el autor del concepto a enseñar en un libro de texto, la que promueve un cambio más generalizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde la perspectiva de la regulación de la intervención directa del docente con el texto, los mapas conceptuales informan sobre las necesidades de refuerzo o profundización en los conceptos desarrollados en el mismo al interior del aula, coincidiendo con el reporte de Pulgar y Sánchez (2014). Si el mapa conceptual de un concepto desarrollado en el texto presenta obstáculos epistemológicos asociados al lenguaje matemático, debería regularse el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto mediante actividades de refuerzo. Con el fin de facilitar el desarrollo de capacidades como la clasificación, a partir del análisis de las propiedades de los conceptos y de los resultados que se desprenden de los mismos.

Desde la perspectiva del proceso de enseñanza y aprendizaje, los mapas conceptuales son una fuente de información sobre los obstáculos didácticos que surgen durante el desarrollo del mismo. La superación de dichos obstáculos necesita de la reflexión sobre las necesidades de cambio en los procesos de enseñanza y



aprendizaje planteados, y en la misma práctica educativa. En este caso, los mapas conceptuales ya no serán únicamente una fuente de información, sino que se convertirán en una fuente de conocimiento que favorecerá el desarrollo profesional del docente (Serradó et al., 2004) al encontrar una nueva forma de uso para el análisis de textos, permitiendo determinar la estructura del texto, teniendo en cuenta su organización y demás aspectos generales; y de manera minuciosa, la naturaleza y características que desde la perspectiva del autor se atribuye a los objetos matemáticos.

De esta forma el uso de los mapas conceptuales determina la existencia de evidencias en relación con elementos que puedan ser considerados generadores de obstáculos didácticos en la enseñanza de un concepto matemático, así como la elección de didácticas establecidas en una situación de enseñanza de un concepto matemático que pueden generar una dificultad, y que pueden estar centrados en dos aspectos de la construcción del conocimiento: uno relacionado con el uso del lenguaje del cálculo y otro con los contextos de ejemplificación y experimentación para esa construcción, regularizando el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto mediante actividades de refuerzo.

## REFERENCIAS

- Anaconda, M., La historia de las matemáticas en la educación matemática, Revista EMA, ISSN 0122-5057, 8(1), 30-46, 2003. [http://funes.uniandes.edu.co/1516/1/94\\_Anaconda2003La\\_RevEMA.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1516/1/94_Anaconda2003La_RevEMA.pdf). Acceso: 11 de marzo (2016)
- Ausubel, D. P., J. D. Novak y H. Hanesian, Psicología de la educación un punto de vista cognoscitivo, 2ª Edición, Trillas, ISBN 9789682413346, México D.F., México (1983)
- Bachelard, G., La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo, 23ª edición, Siglo XXI, ISBN 968-23-1731-2, México D.F, México (2000)
- Bencomo, D., J. D. Godino y M. Wilhelmi, Elaboración de redes ontosemióticas de configuraciones didácticas con atlas/ti, Proceeding of the First International Conference on Concept Mapping, Pamplona, España 14 al 17 de septiembre (2004)
- Brousseau, G., Theory of didactical situations in mathematics, Kluwer A.P., 1ª Edición, ISBN 0-792-34526-6, Dordrecht, Países Bajos (1997)
- Canul E., C., Dolores y G., Martínez-Sierra, De la concepción global a la concepción local, el caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática, RELIME, 14(2), 173-202 (2011)
- De la Torre, S., Aprender de los errores: el tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación, 1ª edición, Editorial Escuela Española, ISBN 84-331-0577-9, Madrid, España (1993)
- Doorman, M. y J. V. Maanen, A historical perspective on teaching and learning calculus, Australian Senior Mathematics Journal, ISBN: 0819-4564, 22(2), 4-14. (2008), <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7125.pdf>, Acceso: 17 de febrero (2016)
- Duroux, A., La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, Publications de l'IREM, 42-66 (1982)
- Font, V., J. D. Godino y J. Gallardo, The emergence of objects from mathematical practices, doi: 10.1007/s10649-012-94411-0, Educational Studies in Mathematics, 82(1), 97-124 (2013)
- García, M., S. Llinares, y G. Sánchez-Matamoros, Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures, doi: 10.1007/s10763-010-9227-2, International Journal of Science and Mathematics Education, 9(5), 1023-1045 (2011)
- González, F. M., C. Morón. y J.D. Novak, Errores conceptuales. Diagnóstico, tratamiento y reflexiones. Ediciones Eunate. ISBN 9788477681182, Pamplona, España (2001)
- Gordillo, W. y L. R. Pino-Fan, Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada, doi: 10.1590/1980-4415v30n55a12, Bolema, 30(55), 535-558 (2016)
- Novak, J. D., Conocimiento y aprendizaje: los mapas conceptuales como herramientas facilitadoras para escuelas y empresas. Alianza Editorial. ISBN 9788420629018, Madrid, España (1998)

Novak, J. D. y A. J. Cañas, *The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them* Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 01-2008, Florida Institute for Human and Machine Cognition, (2008)

Pino-Fan, L. R., J. D. Godino y V. Font, Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas, doi: 10.1590/1980-4415v29n51a04, *Bolema*, 29(51), 60-89 (2015)

Pinzón, W. J. y H. Sarmiento, Algunos obstáculos didácticos presentes en el tratamiento del concepto de derivada en el texto de cálculo. Tesis de Magister, Dpto. de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia (2006)

Pulgar, J. A. y I. R. Sánchez, Impacto de un programa de renovación metodológica en las estrategias cognitivas y el rendimiento académico en cursos de física universitaria, doi: 10.4067/S0718-50062014000500002, *Form. Univ.*, 7(5), 3-14 (2014)

Sánchez-Matamoros, G., M. García y S. Llinares, La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, *RELIME*, 11(2), 267-296 (2008)

Serradó, A., J. M. Cardeñoso y P. Azcárate, Los mapas conceptuales y el desarrollo profesional del docente, *Proceeding of the First International Conference on Concept Mapping*, Pamplona, España 14 al 17 de septiembre (2004)

Spagnolo, F., La modélisation dans la recherche en didactique des mathématiques: les obstacles épistémologiques, *Recherches en Didactique des mathématiques*, ISSN: 0246-9367, 26(3), 337-379, 2006. <http://rdm.penseesauvage.com/-Volume-26-.html>. Acceso: 6 de marzo (2016)

Stewart, J., *Cálculo de una variable. Transcendentes y tempranas*, 6ª Edición, Cengage Learning, ISBN 139786074813173, México D.F., México (2008)